3 ІШКІ КЕРНЕУЛЕР

Тұтас орта механикасында негізгі рольді массалық күштер емес, беттік күштер атқарады. Беттік күштер дегеніміз, тұтас ортаның беттері σ бойынша жайғасқан күштер.
жағынан өтетіндей етіп таңдаймыз.

Нормалі $\vec{n}$ ауданшадағы, кернеу векторының $\vec{P}_n$ бағыты (еркін) кез келген жаққа бағытталуы мүмкін. Оны $\vec{n}$ бағытына және оған перпендикуляр көлемнің бетіне жанама τ бағытына жіктеуге болады. $P_n\vec{n}$ құраушысы - нормаль кернеу, ал $P_\tau\vec{\tau}$ құраушысы –жанама кернеу деп аталады. Нормаль кернеу $\vec{n}$- нормаль бағытымен материалдың м нүктесінде созылуын ($P_n > 0$) немесе сығылуын ($P_n < 0$), ал жанама кернеу ығысуын тудырады.

$\vec{P}_n$ кернеу векторының, координаталар ауданындағы $\vec{P}^1, \vec{P}^2, \vec{P}^3$ кернеу векторларының тәуелділігін ескеріп мына түрде жазуға болады

$$\vec{P}_n = n_i\vec{P}^i = P^{ki}\,\vec{э}_k\, n_i = \vec{P}^i\left(\vec{э}_i \cdot \vec{n}\right) = P^{ki}\,\vec{э}_k\,\left(\vec{э}_i \cdot \vec{n}\right). \qquad (3.1)$$

Бұл теңдік (P^{ki} коэффициентімен бірге) $\vec{n}$ векторының компоненттерінен $\vec{P}_n$ векторының компоненттеріне өтетін сызықтық түрлендіруді береді.

Бас кернеулер. Кернеу тензорының инварианттары

Ортогональды триэдрдің осьтері кернеу тензорының бас бағыттары болып табылады. Бас бағыттарға ортгональды болып келетін жазықтықтар үшін, $\vec{p}_n$ веторы $\vec{n}$-ге коллинеарлы болады, және бұдан келесі түрге өтетін (3.1) теңдеуі орындалуы тиіс.

Бас бағыттар үшін келесі теңдік орынды

$$\vec{P}_n = P^{ki} n_i\,\vec{э}_k = \lambda\vec{n} = \lambda n_i\,\vec{э}^i$$

немесе

$$P_{ki} n_i\,\vec{э}_k = \lambda\delta_k^i n_i\,\vec{э}^k,$$

бұдан

$$\left\| P_{ki} - \lambda\delta_k^i \right\| n_i\,\vec{э}^k = 0,$$

немесе

$$\left\| P_k^i - \lambda\delta_k^i \right\| n_i = 0. \qquad (3.2)$$

(3.2) жүйесі тек матрица детерминанты нөлге тең болған жағдайда ғана ақиқат шешімге ие болады

$$\begin{vmatrix} P_{11}-\lambda & P_{21} & P_{31} \\ P_{12} & P_{22}-\lambda & P_{32} \\ P_{31} & P_{23} & P_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.3)$$

немесе, ашып жазатын болсақ

$$\lambda^3 - J_1^p \lambda^2 + J_2^p \lambda - J_3^p = 0, \qquad (3.4)$$

мұндағы

$$J_1^p = P_{ii}, \qquad (3.5)$$

$$J_2^p = \frac{1}{2}\left(P_{ii}P_{jj} - P_{ij}P_{ij}\right), \qquad (3.6)$$

$$J_3^p = Det\,\|P_{ki}\|. \qquad (3.7)$$

мұндағы $J_1{}^P, J_2{}^P, J_3{}^P$ сәйкесінше кернеу тензорының бірінші, екінші, үшінші инварианттары деп аталады.

(3.4) теңдеуінің түбірлері $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ кернеудің бас мәндері болып табылады:

$$\lambda_1 = P_{n1} = P_1; \qquad \lambda_2 = P_{n2} = P_2; \qquad \lambda_3 = P_{n3} = P_3.$$

Кернеу тензорының инварианттары кернеудің бас мәндері арқылы мына түрде анықталады

$$J_1^p = P_1 + P_2 + P_3, \qquad (3.8)$$

$$J_2^p = P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_1, \qquad (3.9)$$

$$J_3^p = P_1P_2P_3. \qquad (3.10)$$

Кернеу тензоры P_{ij}-ді екі тензорға жіктеуге болады. Оның бірі шарлық тензор:

$$P_{ij} = \lambda \delta_{ij}, \tag{3.11}$$

мұндағы $\lambda = -P = \dfrac{P_{ii}}{3}$- нормал кернеудің орташа мәні, ал екіншісі девиатор деп аталады:

$$D(P_{ij}) = \begin{vmatrix} P_{11} - \lambda & P_{21} & P_{31} \\ P_{12} & P_{22} - \lambda & P_{32} \\ P_{31} & P_{23} & P_{33} - \lambda \end{vmatrix} \tag{3.12}$$

Сонымен, кернеу тензоры P_{ij} мына түрде жіктеледі:

$$P_{ij} = \delta_{ij} \frac{P_{ii}}{3} + D(P_{ij}) \tag{3.13}$$

Есептер мен жаттығулар

3.1 Белгілі бір нүктедегі P_{ij} кернеу тензоры берілген

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Тұтас ортаның сол нүктесінен өтетін $\vec{n}$ бірлік нормаль векторы белгілі

$$\vec{n} = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k},$$

ауданшадағы кернеу векторын $\vec{P}_n$ анықтаңыз.

Шешуі. (3.1) формуласынан $P_n = n_i \vec{P}^i$ екендігі белгілі немесе координаталар өстеріне проекциялары мына түрде болады

$$P_{n1} = n_1 P^{11} + n_2 P^{21} + n_3 P^{31},$$

$$P_{n2} = n_1 P^{12} + n_2 P^{22} + n_3 P^{32},$$

$$P_{n3} = n_1 P^{13} + n_2 P^{23} + n_3 P^{33}.$$

Бірлік нормаль векторы $\vec{n}$ белгілі ауданшаның нүктесіндегі кернеу векторының компоненттері мынаған тең

$$P_{n1} = \frac{14}{3} - \frac{2}{3}, \qquad P_{n2} = \frac{10}{3}, \qquad P_{n3} = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3}.$$

Сонымен кернеу векторының түрі

$$\vec{P}_n = 4\vec{i} - \frac{10}{3}\vec{j}.$$

3.2. Ортаның белгілі бір нүктесіндегі кернеулі күйі кернеу тензорымен берілген

$$P^{ij} = \begin{pmatrix} P & aP & bP \\ aP & P & cP \\ bP & cP & P \end{pmatrix},$$

мұндағы, a, b, c – тұрақтылар, P – кернеудің белгілі бір мәндері. Бірлік нормаль векторы белгілі

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}$$

ауданшадағы нүктенің кернеу векторы нольге тең болатындай, яғни $\vec{P}_n = 0$ a, b және c тұрақтыларын анықтаңыз.

Жауабы. $n_j P^{ij} = 0 \quad (i,\ j = 1, 2, 3)$ теңдеулер жүйесін шеше отырып, $a = b = c = -\frac{1}{2}$ деп алуға болады. Сонымен шешімі тензор арқылы беріледі

$$P^{ij} = \begin{pmatrix} P & -P/2 & -P/2 \\ -P/2 & P & -P/2 \\ -P/2 & -P/2 & P \end{pmatrix}.$$

3.3. Ортаның белгілі бір нүктесінде кернеу тензоры берілген

$$P^{ij} = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Бірлік нормаль векторы белгілі

$$\vec{n} = \frac{3}{7}\vec{i} + \frac{6}{7}\vec{j} + \frac{2}{7}\vec{k},$$

ауданшадағы нүктенің кернеу векторын анықтаңыз.

Жауабы. $\vec{P}_n = -\frac{9}{7}\vec{i} + \frac{5}{7}\vec{j} + \frac{10}{7}\vec{k}$.

3.4. Кернеу тензорын

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

шарлық және девиаторлық бөліктерге жіктеп, девиатордың бірінші инварианты нольге тең екендігін көрсетіңіз.

Шешуі. Шарлық тензор кернеуінің түрі $P_{ij} = \frac{P_{kk}}{3}$. Бұл жерде біз мынаны аламыз $\frac{P_{kk}}{3} = (12 + 9 + 3)/3 = 8$. Осы жағдайда кернеу тензорын шарлық және девиаторлық тензорлардың қосындысы ретінде келтіруге болады

$$P_{ij}=\frac{P_{kk}}{3}+D(P)=\begin{pmatrix} P_{11}-\frac{P_{11}}{3} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22}-\frac{P_{22}}{3} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33}-\frac{P_{33}}{3} \end{pmatrix}+$$

$$\begin{pmatrix} \frac{P_{11}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{P_{22}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{P_{33}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix},$$

бұдан девиатордың бірінші инварианты нольге тең, яғни

$$J_1(D)=4+1-5=0.$$

3.5. Кернеу тензоры берілген

$$P_{ij}=\begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

а) Кернеу тензорының инварианттарын тікелей есептеу арқылы анықтаңыз;

ә) Кернеу тензорын шарлық және девиаторлық тензорларға жіктеңіз.

Шешуі:

(3.5) формуласына сәйкес:

$$J_1^p=P_{ii}=6+6+8=20,$$

(3.6) формуласына сәйкес:

$$J_2^p = \frac{1}{2}\left(P_{ii}P_{jj} - P_{ij}P_{ij}\right) =$$

$$= P_{11}P_{22} + P_{22}P_{33} + P_{33}P_{11} - P_{12}P_{12} - P_{23}P_{23} - P_{31}P_{31} =$$

$$= 36 + 48 + 48 - 9 = 123,$$

(3.7) формуласына сәйкес

$$J_3^p = \left\| P_{ij} \right\| = 6(48) + 3(-24) = 216.$$

(3.11), (3.12) формулаларына сәйкес P_{ij} кернеу тензоры шарлық тензор мен девиатордың қосындылары ретінде келесі түрге жіктеледі:

$$P_{ij} = \frac{P_{kk}}{3} + D(P) = \begin{pmatrix} \frac{20}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{20}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{20}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -3 & 0 \\ -3 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

3.6. Кернеу тензорының компоненттері

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Кернеу тензорының бас осьтері мен бас компоненттерін анықтаңыз.

Шешуі. $\left| P_{ij} - \lambda \delta_i^j \right| = 0$ формуласына байланысты, λ-ның бас компоненттері мына теңдеуден анықталады

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

немесе мына түрде жазылады

$$(\lambda+2)(\lambda-4)(\lambda-1)=0.$$

Бас компоненттер осы теңдеудің түбірлері болып табылады

$$\lambda_{1`}=-2, \qquad \lambda_2=1, \qquad \lambda_3=4.$$

x'_1 осі кернеу тензорының бас компоненттерінің λ_1 осімен сәйкес келсін және n_i^1 осы осьтің бағыттаушы косинусы болсын. Сонда $n_j P^{ij}$ формуласына сәйкес мына теңдеулер жүйесін аламыз

$$(3+2)\, n_1^1+n_2^1+n_3^1=0,$$

$$n_1^1+2n_2^1+2n_3^1=0,$$

$$n_1^1+2n_2^1+2n_3^1=0.$$

Бұдан, $n_1^1=0$, $n_2^1=-n_3^1$, ал $n_i n_i=1$ болғандықтан, $\left(n_2^1\right)^2=\dfrac{1}{2}$ Сондықтан $n_1^1=0$, $n_2^1=1/\sqrt{2}$, $n_3^1=-1/\sqrt{2}$.

Осы сияқты x_2^1 осі кернеу тензорының бас компоненттерінің λ_2 осіне сәйкес келсін. Сонда

$$2n_1^2+n_2^2+n_3^2=0,$$

$$n_1^2-n_2^2+2n_3^2=0,$$

$$n_1^2+n_2^2-n_3^2=0,$$

бұдан $n_1^2=1/\sqrt{3}$, $n_2^2=-1/\sqrt{3}$, $n_3^2=-1/\sqrt{3}$.

Соңында x_3^1 осі λ_3-ке сәйкес келсін. Сонда

$$-n_1^3+n_2^3+n_3^3=0,$$

$$n_1^3 - 4n_2^3 + 2n_3^3 = 0,$$

$$n_1^3 + 2n_2^3 - 4n_3^3 = 0,$$

бұдан $n_1^3 = -2/\sqrt{6}$, $n_2^3 = -1/\sqrt{6}$, $n_3^3 = -1/\sqrt{6}$.

3.7. Кернеу тензоры берілген

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

а) Кернеу тензорының бас мәндері мен бас бағыттарын (осьтерін) анықтаңыз;
ә) Инварианттарын кернеудің бас мәндері арқылы есептеңіз.

3.8. Кернеу тензоры берілген

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

а) Кернеу тензорының бас кернеулері мен бас бағыттарын (осьтерін) анықтаңыз;
ә) кернеу тензорын шарлық тензор мен девиаторға жіктеңіз;
б) кернеу тензоры мене девиатор инварианттарын екі тәсілмен (тікелей есептеу әдісі және бас мәндері арқылы) анықтаңыз.

3.9. Кернеу тензоры берілген

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

а) Кернеу тензорының бас кернеулері мен бас бағыттарын (осьтерін) анықтаңыз;
ә) кернеу тензорын шарлық тензор мен девиаторға жіктеңіз;

б) кернеу тензоры мене девиатор инварианттарын екі тәсілмен (тікелей есептеу әдісі және бас мәндері арқылы) анықтаңыз.

3.10. Кернеу тензоры берілген

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

ә) кернеу тензорын шар және және девиаторлық бөліктерге жіктеңіз;
б) девиатор инварианттарын екі тәсілмен (тікелей есептеу әдісі және бас мәндері арқылы)анықтаңыз.

3.11. $P(x_1, x_2, x_3)$ нүктесінде кернеу тензоры берілген.

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

а) Кернеу тензорының бас кернеулері мен бас бағыттарын (осьтерін) анықтаңыз;
ә) кернеу тензорын шарлық тензор мен девиаторға жіктеңіз;
б) кернеу тензоры мене девиатор инварианттарын екі тәсілмен (тікелей есептеу әдісі және бас мәндері арқылы)анықтаңыз.

3.12. $P(x_1, x_2, x_3)$ нүктесінде кернеу тензоры берілген.

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

а) Кернеу тензорының бас кернеулері мен бас бағыттарын (осьтерін) анықтаңыз;
ә) кернеу тензорын шарлық тензор мен девиаторға жіктеңіз;
б) кернеу тензоры мен девиатор инварианттарын екі тәсілмен (тікелей есептеу әдісі және бас мәндері арқылы)анықтаңыз.

3.13. $P(x_1, x_2, x_3)$ нүктесінде кернеу тензоры берілген.

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & \sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{6} & 1 \end{pmatrix}.$$

а) Кернеу тензорының бас кернеулері мен бас бағыттарын (осьтерін) анықтаңыз;
ә) кернеу тензорын шарлық тензор мен девиаторға жіктеңіз;
б) кернеу тензоры мене девиатор инварианттарын екі тәсілмен (тікелей есептеу әдісі және бас мәндері арқылы)анықтаңыз.

3.14. Кернеу тензоры берілген

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & -10 & 0 \\ -10 & 0 & 30 \\ 0 & 30 & -27 \end{pmatrix}.$$

а) кернеу тензорын шарлық тензор мен девиаторға жіктеңіз;
ә) кернеу тензоры мен девиатор инварианттарын екі тәсілмен (тікелей есептеу әдісі және бас мәндері арқылы)анықтаңыз;
б) кернеу девиаторының бас кернеулерін (осьтерін) табыңыз.

3.15. $P(x_1, x_2, x_3)$ нүктесінде кернеу тензоры берілген.

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -12 & 1 \end{pmatrix}.$$

а) Кернеу тензорының бас мәндері мен бас бағыттарын (осьтерін) анықтаңыз;
ә) кернеу тензорын шарлық тензор мен девиаторға жіктеңіз;
б) кернеу тензорының инварианттарын екі тәсілмен (тікелей есептеу әдісі және бас мәндері арқылы) анықтаңыз.

3.16. Кернеу тензоры берілген

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 0 \\ -6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

а) кернеу тензорын шарлық тензор мен девиаторға жіктеңіз;
ә) кернеу тензоры мен девиатор инварианттарын екі тәсілмен (тікелей есептеу әдісі және бас мәндері арқылы) есептеңіз;
б) кернеу девиаторының бас кернеулерін (осьтерін) анықтаңыз.

3.17. Кернеу тензоры берілген

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 15 & -10 & 0 \\ -10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

а) Кернеу тензорының бас мәндері мен бас бағыттарын (осьтерін) анықтаңыз;
ә) кернеу тензорын шарлық тензор мен девиаторға жіктеңіз;
б) кернеу тензорының инварианттарын екі тәсілмен (тікелей есептеу әдісі және бас мәндері арқылы) анықтаңыз.

ҰСЫНЫЛАТЫН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

Негізгі:

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды: В 2 т. Т.1. 6-е изд. стер. - СПб.: Издательство "Лань", 2004. -528 с. - (Учебники для вузов. Специальная литература).

2. Седов Л.И. Механика сплошной среды: В 2 т. Т.2. 6-е изд. стер. -СПб.: Издательство "Лань", 2004. -560с. - (Учебники для вузов. Специальная литература).

3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа: Учебник для вузов. 7-е изд. испр. - М.: Дрофа, 2003.-840с.

4. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред: М.: Изд-во ЛКИ. 2007. - 320 с.

5. Ершина А.Қ., Шериазданов Ғ.Б. Тұтас орта механикасы-ның теориялық негіздері және классикалық модельдері. Оқулық. / Жалпы ред. басқ. Ш.Ә. Ершин. – Алматы: Қазақ университеті, 2005.– 167 б.

6. Искакбаев А. Деформацияланатын қатты дене механикасының негіздері – Алматы: Қазақ университеті, 2007.- 175 б.

7. Тұтас орта механикасы бойынша тест сұрақтары: Оқу - әдістемелік құралы / құраст.: Искакбаев А.И., Қалтаев А., Туралина Д.Е., Шерьязданов Г.Б.- Алматы: Қазақ университеті, 2015.- 120 бет.

Қосымша:

1. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды: М.: МГУ, 1990.-310 с.

2. Ильюшин А.А., Ломакин В.А., Шмаков А.П. Задачи и упражнения по МСС: М.: МГУ, 1979. -200 с.

3. Шерьязданов Г.Б. Модели механики сплошной среды. Учебное пособие: Алматы. : Қазақ университеті, 2007.- 188 с.

4. Шерьязданов Г.Б. Задачи и упражнения по механике сплошной среды: Учебное пособие. – Алматы: Қазақ университеті, 2008.-68с.

5. Бабкин А.В., Селиванов В.В. Основы механики сплошных сред: Учебник для втузов. – 2-е изд., испр. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2004. - 376 с.

6. J.H.Spurk. Fluid Mechanics.Problems and solutions. – Springer, 1997. – 600p.

7. Қалтаев А., Бекбауов Б.Е., Алибаева Қ. Сұйық және газ механикасынан есептер жинағы: Оқу құралы - Алматы: Қазақ университеті, 2016. – 178 бет.

Оқу –әдістемелік құралы

Д.Е.Туралина., Г.Б. Шерьязданов

Алматы
«Қазақ университеті»